Autres fonctions trigonométriques

Après les fonctions sinus, cosinus et tangente, nous allons voir trois autres types de fonctions.

La fonction sécante est l'inverse de la fonction cosinus :

Sec t = $\frac{hypoténuse}{adjacent} = \frac{1}{\cos t}$

La fonction cosécante est l'inverse de la fonction sinus :

Cosec t = $\frac{hypoténuse}{opposé} = \frac{1}{\sin t}$

La fonction cotangente est l'inverse de la fonction tangente:

Cotan t = $\frac{adjacent}{opposé} = \frac{1}{\tan t} = \frac{\cos t}{\sin t}$

Simplification d'expression algébrique

Sec t = $\frac{1}{\cos t}$ cosec t = $\frac{1}{\sin t}$ cotan t = $\frac{\cos t}{\sin t}$

Exemple 1 :

Sin t x cotan t = sin t x $\frac{\cos t}{\sin t}$ = cos t

Exemple 2 :

Sin t x cos t x sec t x cotan t = sin t x cos t x $\frac{1}{\cos t}$ x $\frac{\cos t}{\sin t}$ = cos t

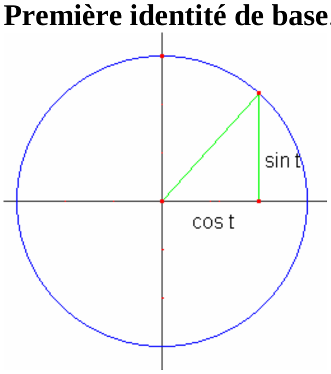
Exemple 3 :

Cos t x cosec t = cos t x $\frac{1}{\sin t}$ = cotan t

Identités trigonométriques

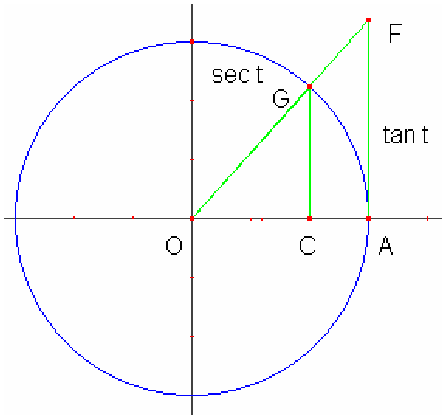
Il y en a trois.

Première identité de base.



Avec Pythagore ➔ $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

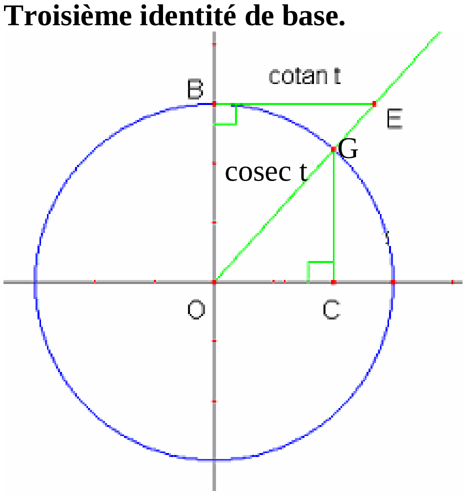
Deuxième identité de base.



$$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$ ➔ $\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$

Démonstration : $\frac{mOF}{mOG} = \frac{mOA}{mOC}$ ➔ $mOF = \frac{mOAxmOG}{mOC} = \frac{1x1}{\cos t} = \sec t$

Troisième identité de base.



$$\frac{\sin^2 t}{\sin^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}$$ ➔ $1 + \cot an^2 t = \cos ec^2 t$

Démonstration :

$\frac{mBE}{mOC} = \frac{mOB}{mCG}$ ➔ $mBE = \frac{mOBxmOC}{mCG} = \frac{1x\cos t}{\sin t} = \cot ant$

$\frac{mOE}{mOG} = \frac{mOB}{mCG}$ ➔ $mOE = \frac{mOBxmOG}{mCG} = \frac{1x1}{\sin t} = \cos ect$

Trouver les valeurs trigonométriques

À partir d'une valeur trigonométrique et d'un quadrant où se situe le point P(t), on peut trouver la valeur des autres fonctions trigonométriques.

Exemple : sin t = 1/2 et t e $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ ➔ $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ ➔ $\cos t = \sqrt{1-(\frac{1}{2})^2} = \sqrt{1-(\frac{1}{4})} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc, cos t = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ car il est dans le deuxième quadrant

Tan t = $\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{(\frac{1}{2})}{-(\frac{\sqrt{3}}{2})} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Sec t = $\frac{1}{\cos t} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Cosec t = $\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{(\frac{1}{2})} = 2$

Cotan t = $\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3}$

Démonstration d'identité trigonométrique

Il suffit de transformer le membre de gauche de l'égalité pour obtenir l'équivalent du membre de droite.

Exemple 1 :

$\tan^2 t - \sin^2 t = \sin^2 t \times \tan^2 t$

$\tan^2 t - \sin^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} - \sin^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} - \frac{\sin^2 t \cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t(1-\cos^2 t)}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t \sin^2 t}{\cos^2 t} = \tan^2 t * \sin^2 t$

Exemple 2 :

$\cot^2 t - \mathrm{cosec}^2 t = -1$

$\cot^2 t - \mathrm{cosec}^2 t = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} - \frac{1}{\sin^2 t} = \frac{\cos^2 t - 1}{\sin^2 t} = \frac{-\sin^2 t}{\sin^2 t} = -1$

Exemple 3 :

$\text{Sec}^2 t + \text{cosec}^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t \sin^2 t}$

$\text{Sec}^2 t + \text{cosec}^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t} + \dfrac{1}{\sin^2 t} = \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t \sin^2 t} + \dfrac{\cos^2 t}{\cos^2 t \sin^2 t} =$
$\dfrac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t \sin^2 t} = \dfrac{1}{\cos^2 t \sin^2 t}$

Exemple 4 :

Sec t – cos t = tan t sin t

$\text{Sec } t - \cos t = \dfrac{1}{\cos t} - \cos t = \dfrac{(1 - \cos^2 t)}{\cos t} = \dfrac{\sin^2 t}{\cos t} = \dfrac{\sin t \sin t}{\cos t} = \tan t \sin t$

Exemple 5 :

$\tan^2 t + \sec^2 t = 2\sec^2 t - 1$

Rappel : $1 + \tan^2 t = \sec^2 t \Rightarrow \tan^2 t = \sec^2 t - 1$

$\tan^2 t + \sec^2 t = \sec^2 t - 1 + \sec^2 t = 2\sec^2 t - 1$