Contenu du cours

Dans un triangle quelconque, lorsque la loi des sinus ne nous permet pas de résoudre un problème, la loi des cosinus va nous permettre de trouver les mesures manquantes mais à certaines conditions.

Rappel sur la loi des sinus

On utilise la loi des sinus dans deux situations précises :

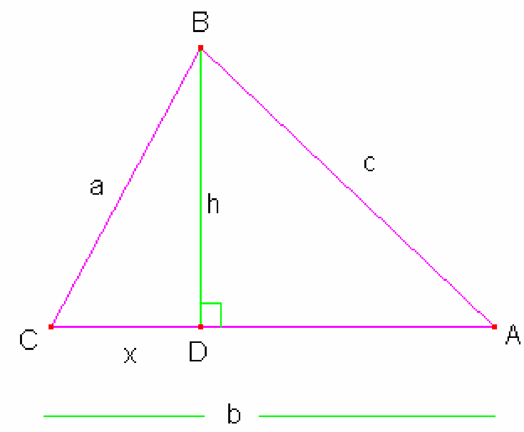
- Lorsque l'on connaît 2 angles et 1 côté.
- Lorsque l'on connaît 2 côtés et 1 angle opposé à un de ces deux côtés.

Définition :

Le carré de la mesure d'un côté d'un triangle quelconque est égale à la somme des carrés des mesures des deux autres côtés moins le double produit des mesures des deux autres côtés par le cosinus de l'angle compris entre ces deux côtés.

Démonstration

Avec une hauteur à partir de B



1. Considérons le triangle ABD.
   Selon Pythagore $c^2 = h^2 + (b-x)^2$
2. Considérons le triangle BCD.
   Selon Pythagore $a^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - x^2$
3. $\text{Cos } C = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a*\cos C$

Reprenons $c^2 = h^2 + (b-x)^2$

$\Rightarrow c^2 = a^2 - x^2 + (b-x)^2$ (car $h^2 = a^2 - x^2$)

$\Rightarrow c^2 = a^2 - x^2 + b^2 – 2bx + x^2$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 – 2bx$

Remplaçons x par a*cos C

$c^2 = a^2 + b^2 – 2ab\cos C$

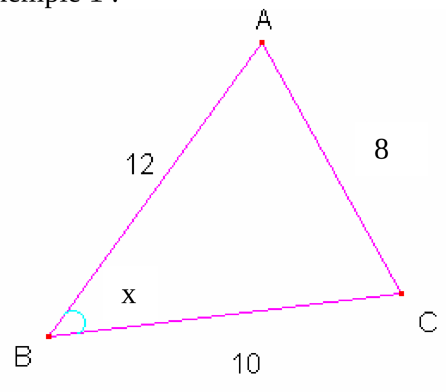
La même démonstration se fait si on part la hauteur à partir du sommet A et du sommet C.
Voici les trois formules pour la loi des cosinus.

$a^2 = b^2 + c^2 – 2bc\text{Cos } A$
$b^2 = a^2 + c^2 – 2ac\text{Cos } B$
$c^2 = a^2 + b^2 – 2ab\text{Cos } C$

On utilise la loi des cosinus dans les situations suivantes :

Cas 1 : Lorsque l'on connaît les 3 mesures de côtés et que l'on cherche la mesure d'un angle.

Exemple 1 :



On cherche l'angle x

$8^2 = 12^2 + 10^2 - 2*12*10\text{Cos } x$
$64=144+100 - 240*\text{Cos } x$
$-180 = -240* \text{Cos } x$
$\text{Cos } x = 0{,}75$
$\text{Cos}^{-1} (0{,}75) = x$
$x \approx 41^o$

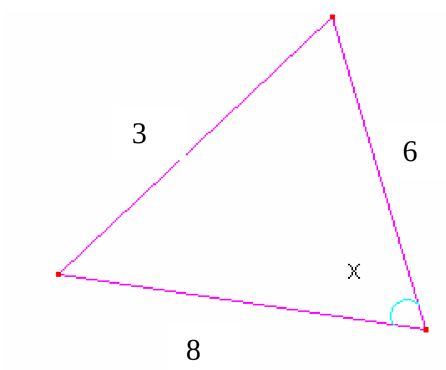
Pour trouver l'angle C ou A, on utilise la loi des sinus.

$$\frac{8}{\sin 41^o} = \frac{12}{\sin C}$$

$$\sin C = \frac{12 * \sin 41^o}{8}$$

$C \approx 80^o$
Donc, $A \approx 59^o$

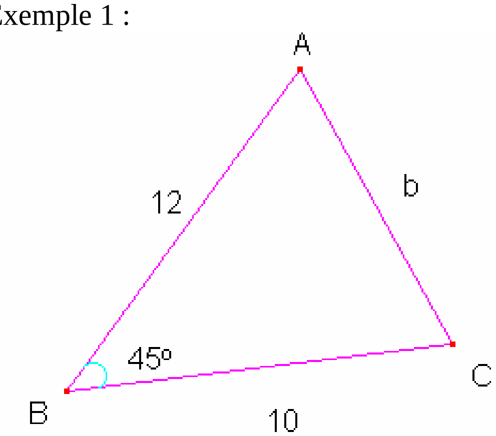
Exemple 2 :



On cherche l'angle x

$3^2 = 6^2 + 8^2 - 2*6*8\text{Cos } x$
$9=36+64 - 96*\text{Cos } x$
$-91 = -96* \text{Cos } x$
$\text{Cos } x = (91/96)$
$\text{Cos}^{-1} (91/96) = x$
$x \approx 18{,}57 \approx 19^o$

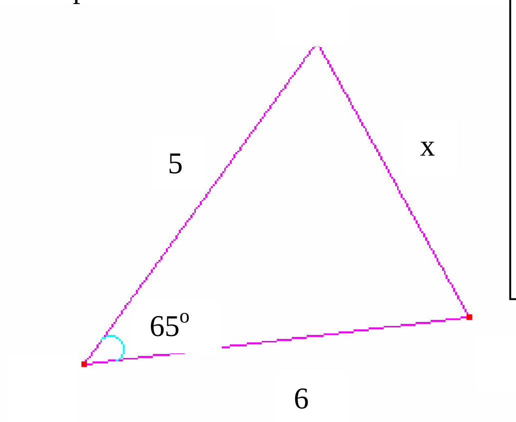
Cas 2 : Lorsque l'on connaît 1 angle et les 2 côtés formant l'angle.
Exemple 1 :



On cherche le côté b alors, nous allons utiliser la formule
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\text{Cos } B$

$b^2 = 10^2 + 12^2 - 2*10*12\text{Cos } 45^o$
$b^2 = 100 + 144 - 240*\text{Cos } 45^o$
$b^2 = 74{,}294373$
$b \approx 8{,}6$

Exemple 2 :



$x^2 = 5^2 + 6^2 - 2*5*6\text{Cos } 65^o$
$x^2 = 25 + 36 - 60*\text{Cos } 65^o$
$x^2 = 61 - 60*\text{Cos } 65^o$
$x^2 = 35{,}6429043$
$x \approx 5{,}97$